УДК
621.8
З-389

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.Ф. ЗАЦЕПИН, Ю.Г. МАРТЫНЕНКО, Д.В. ТИНЬКОВ

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА, ВОРОНЦА, ЧАПЛЫГИНА В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ

Методическое пособие
по курсу
«Теоретические основы робототехники»
для студентов, обучающихся по направлению
«Роботы и робототехнические системы»

Москва Издательство МЭИ 2005

УДК
621.8
З-389
УДК: 621.865.8(072)

Утверждено учебным управлением МЭИ

Подготовлено на кафедре теоретической механики и мехатроники

Рецензент: докт. техн. наук А.Д.Трухний

Зацепин М.Ф. Уравнения Лагранжа, Воронца, Чаплыгина в задачах
З-389 динамики мобильных роботов / М.Ф. Зацепин, Ю.Г. Мартыненко, Д.В. Тиньков. – М.: Издательство МЭИ, 2005. – 32 с.

В пособии на конкретных примерах излагается методика решения задач неголономной механики методами Лагранжа, Воронца, Чаплыгина. Дано необходимое теоретическое обоснование. Содержатся задачи для аудиторных занятий и самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс «Теоретические основы робототехники».

Введение

Раздел неголономной механики является достаточно сложным, и его изложение в классических курсах ориентировано на чисто механические приложения. В робототехнике механическая система с неголономными связями служит объектом управления, и механические процессы в ней взаимосвязаны с информационными процессами обработки выходных сигналов чувствительных датчиков и формирования управляющих воздействий.

Вывод уравнений движения механических систем с неголономными связями является одним из центральных моментов при изучении аналитической динамики. Опыт чтения этого раздела курса показывает, что существенное упрощение процесса получения уравнений Лагранжа с неопределенными множителями, уравнений Воронца и Чаплыгина [1] может быть достигнуто с использованием матричной формы записи. Преимуществом такой методики является не только уменьшение объема выкладок при выводе уравнений, но и упрощение использования методов компьютерной алгебры.

1. Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями

Рассматривается натуральная механическая система, положение которой определяется s-мерным вектором обобщенных координат $\mathbf{q} = \left(q_1, q_2, \ldots q_S\right)^T$. Здесь T – знак транспонирования. На систему наложено ℓ дифференциальных неинтегрируемых (неголономных) стационарных связей, уравнения которых имеют вид

$$\underset{\ell \text{x} s}{\mathbf{B}}\ \underset{s\text{x}1}{\dot{\mathbf{q}}} = \underset{\ell\text{x}1}{0}. \tag{1.1}$$

Здесь $\dot{\mathbf{q}}$ – вектор обобщенных скоростей (точка обозначает дифференцирование по времени); $\mathbf{B}$ – прямоугольная матрица ($\ell \times s$), элементы которой являются функциями обобщенных координат (для простоты связи считаются стационарными, поэтому $\mathbf{B}$ явно от времени не зависит).

Уравнения движения системы есть уравнения Лагранжа с неопределенными множителями:

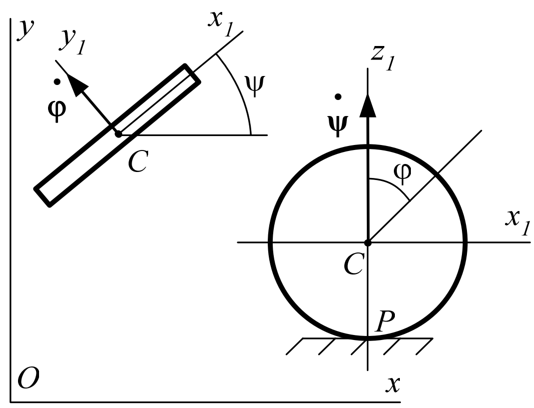
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \mathbf{Q} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}. \tag{1.2}$$

Здесь T – кинетическая энергия системы; $\mathbf{Q}$ – вектор обобщенных сил; $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\ell\right)^T$ – ℓ-мерный вектор неопределенных множителей Лагранжа. Производная от скаляра T по вектору $\mathbf{q}$ определяется как вектор-строка:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}, \frac{\partial T}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial T}{\partial q_s}\right).$$

Уравнения (1.1), (1.2) образуют замкнутую систему ($s + \ell$) уравнений для ($s + \ell$) неизвестных $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\lambda}$. Механический смысл неопределенных множителей $\boldsymbol{\lambda}$ состоит в том, что вектор $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$ представляет собой обобщенную реакцию неголономных связей.

Задача 1.1



Однородный диск массой m с радиусом r катится без скольжения так, что его плоскость остается перпендикулярной горизонтальной плоскости качения. Составить уравнения движения диска; определить движение, отвечающее начальным условиям $x(0)=0$, $y(0)=0$, $\psi(0)=0$, $\dot\psi(0)=\Omega_{\text{o}}$, $\varphi(0)=0$, $\dot\varphi(0)=\omega_{\text{o}}$; найти реакцию неголономной связи.

Решение. Положение диска определяется четырехмерным вектором обобщенных координат $\mathbf{q}=(x,y,\psi,\varphi)^T$, где x, y – координаты центра диска. На эти координаты наложена неголономная стационарная связь $\mathbf{V}_P=0$. Для получения уравнений этой связи составим выражение для скорости точки P в соответствии с графом $C\to P$ и приравняем его нулю.

$$\mathbf{V}_P=\mathbf{V}_C+\left[\boldsymbol{\Omega}_1,\mathbf{CP}\right]=0\,.$$

В матричной форме в трехграннике $Oxyz$ это выражение будет иметь вид

$$\mathbf{V}_C+\hat{\mathbf{CP}}\,\boldsymbol{\Omega}_1=\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-r&0\\ r&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dot\varphi\sin\psi\\ \dot\varphi\cos\psi\\ \dot\psi\end{pmatrix}=0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\dot x-\dot\varphi r\cos\psi=0;\\ &\dot y-\dot\varphi r\sin\psi=0.\end{aligned}\qquad(1.3)$$

Отвечающая этим уравнениям и вектору $\mathbf{q}$ матрица $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&-r\cos\psi\\ 0&1&0&-r\sin\psi\end{pmatrix}.$$

Вычислим кинетическую энергию диска как функцию обобщенных координат и скоростей:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2)+T^{от},$$

где $T^{от}$ – кинетическая энергия движения диска относительно точки C. Так как диск совершает пространственное движение, $T^{от}$ определим как для тела, вращающего около одной неподвижной точки:

$$T^{om} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_1^T \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}_1, \qquad \mathbf{I} = \frac{mr^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$T^{om} = \frac{mr^2}{8}(2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2).$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{mr^2}{8}(2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2).$$

В рассматриваемом движении диска вектор обобщенных сил $\mathbf{Q} = 0$ и уравнение (1.2) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^T.$$

Выполняя все процедуры, предусмотренные этим уравнением, получим

$$m\ddot{x} = \lambda_1, \qquad m\ddot{y} = \lambda_2, \qquad \frac{mr^2}{4}\ddot{\psi} = 0;$$
$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = -r(\lambda_1 \cos\psi + \lambda_2 \sin\psi). \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3), (1.4) представляют замкнутую систему, определяющую движение диска и реакцию неголономной связи.

Найдем движение, отвечающее заданным начальным условиям. Из третьего уравнения системы (1.4) находим

$$\dot{\psi} = \Omega_o, \qquad \psi = \Omega_o t.$$

Из первого, второго и четвертого уравнений имеем

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = -rm(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi). \tag{1.5}$$

Продифференцировав (1.3) и подставив $\ddot{x}, \ddot{y}$ в (1.5), получим

$$\frac{3mr^2}{2}\ddot{\varphi} = 0.$$

Отсюда

$$\dot{\varphi} = \omega_o, \qquad \varphi = \omega_o t.$$

Подставим $\dot{\varphi}$ и ψ в (1.3):

$$\dot{x} = \omega_o r \cos\Omega_o t, \qquad \dot{y} = \omega_o r \sin\Omega_o t. \tag{1.6}$$

Параметрические уравнения движения центра C диска будут иметь вид

$$x = \frac{\omega_o r}{\Omega_o}\sin\Omega_o t, \qquad y = \frac{\omega_o r}{\Omega_o}(1 - \cos\Omega_o t).$$

Траекториями, отвечающими этим уравнениям, является семейство окружностей радиуса $R_T = \dfrac{\omega_o r}{\Omega_o}$, центр которых смещен по оси y на величину этого радиуса. Такие же окружности описывает и точка касания диска с плоскостью качения – неподвижные центроиды, так как по условию задачи плоскость диска остается перпендикулярной плоскости качения. Центр C диска движется по траектории с постоянной скоростью $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega_o r$. Для определения проекций $R_x = \lambda_1$, $R_y = \lambda_2$ реакции R неголономной связи продифференцируем (1.6) и подставим $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ в первое и второе уравнения (1.4):

$$R_x = -m\Omega_o\omega_o r \sin\Omega_o t, \qquad R_y = m\Omega_o\omega_o r\cos\Omega_o t;$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = m\Omega_o\omega_o r.$$

Таким образом, реакция неголономной связи постоянна по величине и направлена к центру соответствующей неподвижной центроиды радиуса:

$$R_T = \frac{\omega_o r}{\Omega_o}.$$

Обсудим условия освобождаемости неголономной связи. Реакция неголономной связи во время движения реализуется силой кулонова трения $F_{тр} \le fN = fmg$. Следовательно,

$$m\Omega_o\omega_o r \le fmg,$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Учитывая, что $\omega_o r = V_{Cx1} = V_C$, $\Omega_o = \dfrac{V_C}{R_T}$, получим ограничения по скорости V_C:

$$V_C^2 \le fgR_T.$$

Примечание. Запишем уравнения связи $\mathbf{V}_P = 0$ в осях $Cx_1y_1z_1$:

$$\begin{pmatrix} V_{Px1} \\ V_{Py1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{Cx1} \\ V_{Cy1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$V_{Px1} = V_{Cx1} - \dot{\varphi}r = 0, \quad V_{Py1} = V_{Cy1} = 0.$$

Учитывая, что V_{Cx1}, V_{Cy1} связаны с $\dot{x}, \dot{y}$ матрицей направляющих косинусов:

$$\begin{pmatrix} V_{Cx1} \\ V_{Cy1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим уравнения связи и соответствующую им и вектору $\mathbf{q}$ матрицу $\mathbf{B}_1$:

$$\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi - \dot{\varphi}r = 0, \quad -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0;$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & -r \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор неопределенных множителей

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \left(\lambda_{11}, \lambda_{12}\right)^T.$$

Уравнениями движения диска будут

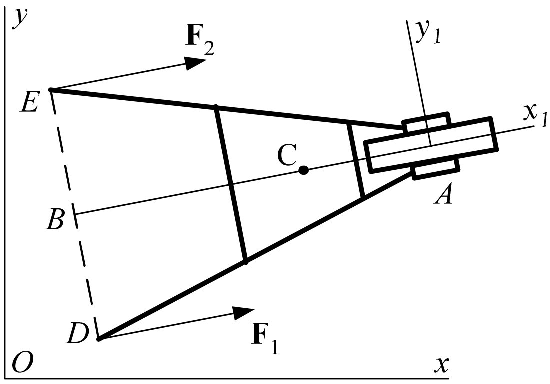
$$m\ddot{x} = \lambda_{11}\cos\psi - \lambda_{12}\sin\psi; \qquad m\ddot{y} = \lambda_{11}\sin\psi + \lambda_{12}\cos\psi;$$

$$\frac{mr^2}{4}\ddot{\psi} = 0; \qquad \frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = -\lambda_{11}r. \tag{1.7}$$

Если в уравнениях (1.4) и (1.7) исключить неопределенные множители, получим одну и туже систему

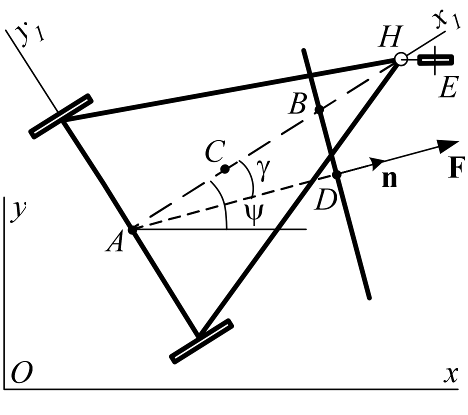
$$\ddot{\psi} = 0, \quad \ddot{\varphi}r = -2\left(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi\right).$$

Задача 1.2



Составить уравнения движения одноколесной тачки под действием сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$. Корпус тачки массой m_1 движется параллельно горизонтальной плоскости, по которой колесо массой m_2 катится без скольжения. Силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ параллельны оси Ax_1, $AC = a$, точка C – центр масс корпуса, радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$, $BD = BE = b$, колесо – однородный диск радиуса R.

Задача 1.3



Составить уравнения движения буера массой m по горизонтальной поверхности льда. Давление ветра на парус моделируется силой $\mathbf{F}$, приложенной в точке D и направленной по нормали к плоскости паруса. Парус моделируется пластиной. Линия действия силы $\mathbf{F}$ проходит через точку A. Нормаль $\mathbf{n}$ направлена под углом γ к оси Ax_1; $AB=b$, $AC=a$, точка C – центр масс буера; радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$. В точке H – гладкая опора (свободный невесомый конек).

Решение. Положение буера определяется трехмерным вектором $\mathbf{q} = \left(x, y, \psi\right)^T$, где x, y – координаты точки A. На систему наложена неголономная связь $V_{Ay1}=0$, уравнение которой найдем, перепроектировав вектор скорости точки A из неподвижной системы координат $Oxyz$ в систему $Ox_1y_1z_1$, связанную с буером:

$$\begin{pmatrix} V_{Ax1} \\ V_{Ay1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi \\ -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда уравнением связи $V_{Ay1} = 0$ будет

$$-\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0. \qquad (1.8)$$

Матрица **B,** отвечающая этому уравнению и вектору **q,** имеет вид

$$\mathbf{B} = \left(-\sin\psi; \quad \cos\psi; \quad 0\right).$$

Найдем выражение кинетической энергии плоского движения буера как функцию обобщенных координат и скоростей:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\psi}^2.$$

Выразим $\dot{x}_C$, $\dot{y}_C$ через обобщенные скорости и координаты. В соответствии с графом $A \to C$ имеем

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_A - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\,\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\psi \\ a\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\dot{x}_C = \dot{x} - \dot{\psi}a\sin\psi, \qquad \dot{y}_C = \dot{y} + \dot{\psi}a\cos\psi.$$

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{\psi}a(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi)) + \frac{1}{2}I\dot{\psi}^2, \qquad I = m(\rho^2 + a^2).$$

Найдем вектор обобщенных сил $\mathbf{Q} = \left(Q_x, Q_y, Q_\psi\right)^T$. Для этого вычислим мощность силы $\mathbf{F}$ на возможной скорости точки D:

$$N^{\text{â}} = F_x V_{Dx}^{\text{â}} + F_y V_{Dy}^{\text{â}}.$$

Выражение для проекций скорости точки D найдем в соответствии с графом $A \to D$:

$$\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_A - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\,\mathbf{AD} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1\cos(\psi-\gamma) \\ b_1\sin(\psi-\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$V_{Dx} = \dot{x} - \dot{\psi}b_1\sin(\psi-\gamma), \qquad V_{Dy} = \dot{y} + \dot{\psi}b_1\cos(\psi-\gamma),$$

где $b_1 = b\cos\gamma$. Так как связи стационарные, то возможные скорости $V_{Dx}^{\text{â}}, V_{Dy}^{\text{â}}$ удовлетворяют также этим уравнениям, и выражение для мощности примет вид

$$F\cos(\psi-\gamma)\left(\dot{x}^{\text{â}} - \dot{\psi}^{\text{â}}b_1\sin(\psi-\gamma)\right) +$$
$$+F\sin(\psi-\gamma)\left(\dot{y}^{\text{â}} + \dot{\psi}^{\text{â}}b_1\cos(\psi-\gamma)\right) = Q_x\dot{x}^{\text{â}} + Q_y\dot{y}^{\text{â}} + Q_\psi\dot{\psi}^{\text{â}}.$$

Отсюда

$$Q_x = F\cos(\psi - \gamma), \qquad Q_y = F\sin(\psi - \gamma), \qquad Q_\psi = 0.$$

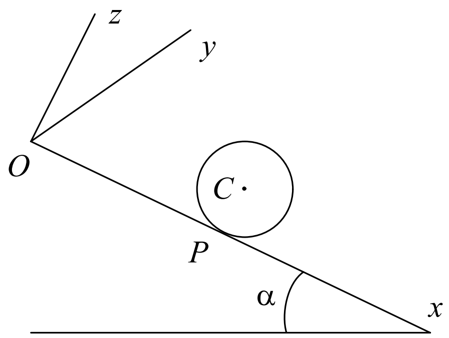
Выполним все процедуры в соответствии с (1.2):

$$\begin{pmatrix} m\dfrac{d}{dt}(\dot{x} - \dot{\psi}a\sin\psi) \\ m\dfrac{d}{dt}(\dot{y} + \dot{\psi}a\cos\psi) \\ I\ddot{\psi} + ma(\ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\cos(\psi - \gamma) \\ F\sin(\psi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}\lambda .$$

Запишем эту систему в скалярной форме и дополним уравнением связи (1.8), продифференцировав его по времени. Исключив неопределенный множитель λ, получим замкнутую систему уравнений движения буера:

$$\begin{cases} m(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi - \dot{\psi}^2 a) = F\cos\gamma; \\ I\ddot{\psi} + ma(\ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi) = 0; \\ \ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi - \dot{\psi}(\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi) = 0. \end{cases}$$

Задача 1.4



Пустотелый тонкостенный шар радиусом r катится по шероховатой наклонной плоскости. Внутри шара по экватору имеется кольцо массой m радиусом r_1. Составить уравнения движения шара, если угол наклона плоскости равен α, а ось Ox направлена по склону вниз. Массой оболочки шара пренебречь.

Решение. Введем неподвижный трехгранник $Oxyz$. Положение шара определяется пятимерным вектором $\mathbf{q} = (x, y, \varphi, \psi, \theta)^T$, где x, y – координаты центра C шара; φ, ψ, θ – углы Эйлера. На систему наложена неголономная связь $\mathbf{V}_P = 0$. Для получения уравнений этой связи составим выражение для скорости точки P в соответствии с графом $C \to P$ и приравняем его нулю:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_C + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{CP}].$$

В матричной форме в трехграннике $Oxyz$ это выражение будет иметь вид

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_C + \hat{\mathbf{CP}}\,\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\dot{x} - \Omega_y r = 0, \qquad \dot{y} + \Omega_x r = 0. \tag{1.9}$$

Согласно кинематическим уравнениям Эйлера проекции Ω_x, Ω_y вектора угловой скорости шара на оси неподвижного трехгранника $Oxyz$ имеют вид

$$\Omega_x = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi, \qquad \Omega_y = -\dot\varphi \sin\theta \cos\psi + \dot\theta \sin\psi.$$

Подставляя эти выражения в (1.9), получим

$$\begin{aligned} &\dot x + r(\dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi) = 0;\\ &\dot y + r(\dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi) = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Отвечающая этим уравнениям и вектору **q** матрица **B** имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r\sin\theta\cos\psi & 0 & -r\sin\psi \\ 0 & 1 & r\sin\theta\sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Найдем выражения кинетической энергии как функции обобщенных координат и скоростей:

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + T^{om},$$

здесь

$$V_C^2 = \dot x^2 + \dot y^2.$$

Так как шар совершает пространственное движение, T^{om} определим по формуле для тела, вращающего около одной неподвижной точки:

$$T^{om} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \mathbf{I}\mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{I} = \frac{mr_1^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{x_1} \\ \Omega_{y_1} \\ \Omega_{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi \\ \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi \\ \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$T^{om} = \frac{mr_1^2}{2}\left(\Omega_{x1}^2 + \Omega_{y1}^2 + 2\Omega_{z1}^2\right) = \frac{mr_1^2}{2}\left(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2 + 2\dot\psi^2 \cos^2\theta + 2\dot\varphi^2 + 4\dot\psi\dot\varphi\cos\theta\right),$$

где $\Omega_{x1}, \Omega_{y1}, \Omega_{z1}$ – проекции вектора угловой скорости на оси, связанные с шаром.

После преобразований получим:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{mr_1^2}{4}\left(2\dot\varphi^2 + \dot\psi^2(1+\cos^2\theta) + \dot\theta^2 + 4\dot\varphi\dot\psi\cos\theta\right).$$

Потенциальная энергия шара $\Pi = -mgx\sin\alpha$.

Уравнение (1.2) для консервативной системы запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}, \tag{1.11}$$

где

$$L = T - \Pi, \qquad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^T.$$

Выполним все процедуры в соответствии с (1.11):

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} - mg\sin\alpha \\ m\ddot{y} \\ mr_1^2 \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right) \\ \dfrac{mr_1^2}{2}\dfrac{d}{dt}\left(\dot{\psi}(1+\cos^2\theta) + 2\dot{\varphi}\cos\theta\right) \\ \dfrac{mr_1^2}{4}\left(2\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\sin 2\theta - 4\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r\sin\theta\cos\psi & r\sin\theta\sin\psi \\ 0 & 0 \\ -r\sin\psi & r\cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$m\ddot{x} - mg\sin\alpha = \lambda_1;$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2;$$

$$mr_1^2 \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right) = r\sin\theta(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi);$$

$$\frac{mr_1^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\psi}(1+\cos^2\theta) + 2\dot{\varphi}\cos\theta\right) = 0;$$

$$\frac{mr_1^2}{4}\left(2\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\sin 2\theta - 4\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\right) = -r(\lambda_1\sin\psi - \lambda_2\cos\psi).$$

Полученные уравнения вместе с уравнениями связи (1.10) представляют замкнутую систему, определяющую движение шара и реакции неголономной связи.

Задача 1.5

Составить уравнения движения тонкостенного шара радиусом r. Внутри шара имеется перегородка – тонкий однородный диск массой m, центр которого совпадает с центром шара. Шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Массой оболочки шара пренебречь.

Задача 1.6

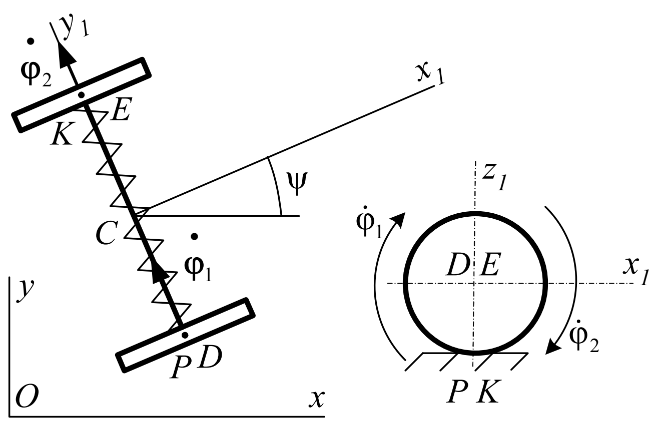
Составить уравнения движения однородного шара массой m радиусом r. Шар катится без скольжения по наклонной плоскости, угол наклона которой равен α.

Задача 1.7

Составить уравнения движения тонкостенного шара радиусом r, через центр которого проходит тонкий однородный стержень массой m. Шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Массой оболочки шара пренебречь.

Задача 1.8

Система, состоящая из двух одинаковых колёс радиуса R каждое, могущих независимо вращаться вокруг общей нормальной к ним оси DE, катится



по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Колёса связаны пружиной жесткости c, работающей на кручение (упругий торсион). Составить уравнения движения системы, если колеса – однородные диски массой m_1, а ось DE – однородный стержень массой m_o и длиной 2ℓ. Точка C – середина стержня.

Решение. Положение диска определяется четырехмерным вектором обобщенных координат $\mathbf{q}=\left(\varphi_1,\varphi_2,x,y\right)^T$, где x, y – координаты точки C. На эти координаты наложена неголономная стационарная связь $\overline{V}_P=0$. Для получения уравнений этой связи составим выражение для скорости точки P в соответствии с графом $C\to D\to P$ и приравняем его нулю:

$$\mathbf{V}_P=\mathbf{V}_C-\hat{\mathbf{\Omega}}\mathbf{CD}+\hat{\mathbf{DP}}\mathbf{\Omega}_1 .$$

В трехграннике $Oxyz$ это выражение будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&\dot\psi&0\\ -\dot\psi&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell\sin\psi\\ -\ell\cos\psi\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-R&0\\ R&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dot\varphi_1\sin\psi\\ \dot\varphi_1\cos\psi\\ \dot\psi\end{pmatrix}=0,$$

отсюда

$$\begin{aligned}&\dot x+\dot\psi\ell\cos\psi-\dot\varphi_1 R\cos\psi=0,\\ &\dot y+\dot\psi\ell\sin\psi-\dot\varphi_1 R\sin\psi=0.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Из условия $\mathbf{V}_K=0$ найдём $\dot\psi$. В соответствии с графом $P\to D\to E\to K$

$$\mathbf{V}_K=\mathbf{V}_P+\hat{\mathbf{PD}}\mathbf{\Omega}_1+\hat{\mathbf{DE}}\mathbf{\Omega}+\hat{\mathbf{EK}}\mathbf{\Omega}_2 .$$

В трехграннике $Ox_1y_1z_1$ это выражение будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}0&R&0\\ -R&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \dot\varphi_1\\ \dot\psi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-2\ell\\ 0&0&0\\ 2\ell&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot\psi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-R&0\\ R&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \dot\varphi_2\\ \dot\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot\varphi_1R-\dot\psi2\ell-\dot\varphi_2R\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=0.$$

Отсюда

$$\dot\psi=(\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)R/2\ell .\tag{1.13}$$

После исключения $\dot\psi$ из (1.12) уравнения связи примут вид

$$\begin{aligned}&\dot x-\frac{R}{2}\dot\varphi_1\cos\psi-\frac{R}{2}\dot\varphi_2\cos\psi=0,\\ &\dot y-\frac{R}{2}\dot\varphi_1\sin\psi-\frac{R}{2}\dot\varphi_2\sin\psi=0.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Отвечающая этим уравнениям и вектору $\mathbf{q}$ матрица $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -\dfrac{R}{2}\cos\psi & -\dfrac{R}{2}\cos\psi & 1 & 0 \\ -\dfrac{R}{2}\sin\psi & -\dfrac{R}{2}\sin\psi & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Интегрируя (1.13) при $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$, получим

$$\psi=(\varphi_1-\varphi_2)R/2\ell. \tag{1.16}$$

Вычислим кинетическую энергию системы

$$T=T_o+T_1+T_2.$$

Кинетическая энергия оси DE

$$T_0=\frac{1}{2}m_o(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}\frac{m_0\ell^2}{3}\dot{\psi}^2.$$

Кинетическая энергия колес

$$T_1=\frac{1}{2}m_1V_D^2+T_1^{om}, \qquad T_2=\frac{1}{2}m_1V_E^2+T_2^{om}.$$

Учитывая (1.13) и то, что $V_D=\dot{\varphi}_1R,\ V_E=\dot{\varphi}_2R$, после несложных преобразований получим

$$T=\frac{1}{2}m_0(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I_0(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)^2+\frac{3}{4}m_1R^2(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2);$$

$$I_0=(m_0\ell^2+\frac{m_1R^2}{2})\frac{R^2}{4\ell^2}.$$

Вычислим потенциальную энергию пружины

$$\Pi=\frac{c}{2}(\varphi_1-\varphi_2)^2.$$

Используя уравнения Лагранжа в форме (1.11.), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}m_1R^2\ddot{\varphi}_1+I_0(\ddot{\varphi}_1-\ddot{\varphi}_2)=-c(\varphi_1-\varphi_2)-\frac{R}{2}(\lambda_1\cos\psi+\lambda_2\sin\psi),\\
&\frac{3}{2}m_1R^2\ddot{\varphi}_2+I_0(\ddot{\varphi}_1-\ddot{\varphi}_2)=c(\varphi_1-\varphi_2)-\frac{R}{2}(\lambda_1\cos\psi+\lambda_2\sin\psi),\\
&m_0\ddot{x}=\lambda_1,\\
&m_0\ddot{y}=\lambda_2.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Уравнения (1.14), (1.16), (1.17) представляют замкнутую систему, определяющую движение колёсной пары с упругой осью.

Задача 1.9

Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, определить движение системы, отвечающее начальным условиям: $\varphi_1(0)=0;\ \dot{\varphi}_1(0)=0;\ \varphi_2(0)=0;\ \dot{\varphi}_2(0)=\omega.$ Массой оси пренебречь.

Решение. Если $m_0=0$, то из (1.17) следует, что $\lambda_1=0;\ \lambda_2=0$. В этом случае уравнения движения колёсной пары примут вид

$$a\ddot{\varphi}_1+I(\ddot{\varphi}_1-\ddot{\varphi}_2)=-c(\varphi_1-\varphi_2); \tag{1.18}$$

$$a\ddot{\varphi}_2 - I(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = c(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (1.19)$$

где $a = 3m_1R^2/2$; $I = m_1R^4/8\ell^2$.

Сложив (1.18) и (1.19), получим

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = 0.$$

Отсюда с использованием начальных условий находим

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = \omega, \qquad (1.20)$$

следовательно,

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \omega t. \qquad (1.21)$$

Вычитая (1.19) из (1.18), получим

$$a(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + 2I(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = -2c(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (1.22)$$

Обозначим $(\varphi_1 - \varphi_2)$ через z, а $2c/(a+2I)$ – через k^2 и перепишем (1.22) в следующем виде:

$$\ddot{z} + k^2 z = 0.$$

После интегрирования данного уравнения для заданных начальных условий получим

$$z = \frac{\omega}{k}\sin kt \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega}{k}\sin kt. \qquad (1.23)$$

Разрешим систему (1.21),(1.23) и найдём зависимость от времени углов φ_1, φ_2:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\omega t + \frac{\omega}{k}\sin kt);$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(\omega t - \frac{\omega}{k}\cos kt).$$

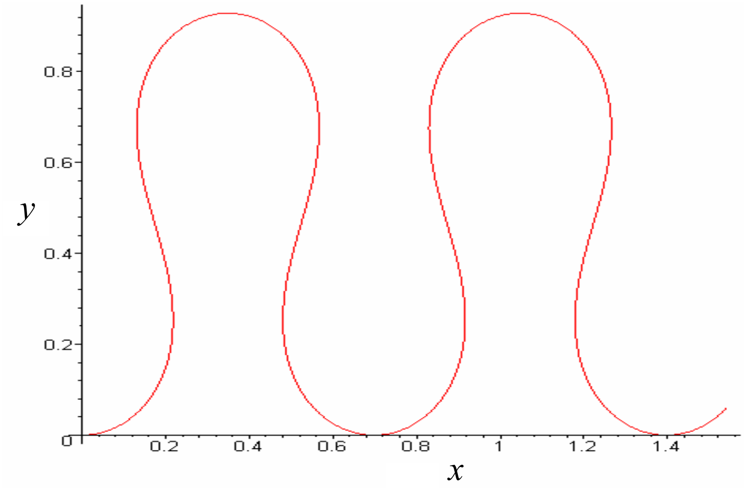
Для определения движения точки C колёсной парой выпишем из решения предыдущей задачи уравнения связи в виде

$$\dot{x} = \frac{R}{2}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\cos\left[\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)R}{2\ell}\right]; \qquad \dot{y} = \frac{R}{2}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\sin\left[\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)R}{2\ell}\right].$$

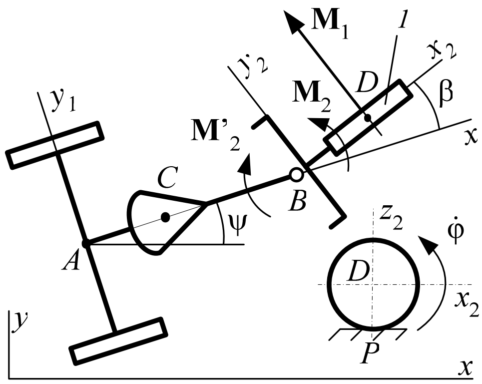
Перепишем эти уравнения с учетом (1.20), (1.23)

$$\dot{x} = \frac{R}{2}\omega\cos\left[\frac{\omega R}{2\ell k}\sin kt\right]; \qquad \dot{y} = \frac{R}{2}\omega\sin\left[\frac{\omega R}{2\ell k}\sin kt\right]. \qquad (1.24)$$

Ниже на рисунке приведена траектория движения точки C, построенная по результатам интегрирования уравнения (1.24) с помощью математического пакета Maple 7 для начальных условий $x(0) = y(0) = 0$ при $\omega = 1$; $R = 0{,}15$; $\ell = 0{,}2$; $k = 0{,}2$.



Задача 1.10



Трехколесный велосипед движется по горизонтальной плоскости под действием момента $\mathbf{M}_1$, который передается от велосипедиста на педали ведущего колеса *1* с радиусом r. На вилку от велосипедиста передается управляющий момент $\mathbf{M}_2$ $(M'_{2z} = -M_{2z})$. Составить уравнения движения велосипеда, если его масса вместе с велосипедистом m; $AC = a$; C – центр масс; радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$; $AB = b$; $BD = h$. Колеса катятся без проскальзывания. Их массой пренебречь.

Решение. Положение системы определяется пятимерным вектором $\mathbf{q} = (x, y, \psi, \beta, \varphi)^T$, где *x, y* – координаты точки *A*. На систему наложены три неголономные связи $V_{Ay1} = 0$; $V_{Px2} = 0$; $V_{Py2} = 0$.

Уравнение первой связи $V_{Ay_1} = 0$ получено в задаче 1.3:

$$-\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0. \tag{1.25}$$

Для определения уравнений второй и третьей связи запишем выражение для скорости точки *P* в соответствии с графом $A \to B \to D \to P$ и приравняем его нулю:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A - \hat{\mathbf{\Omega}}\,\mathbf{AB} + \hat{\mathbf{BD}}\,\mathbf{\Omega}_1 + \hat{\mathbf{DP}}\,\mathbf{\Omega}_2 = 0.$$

В трехграннике $Bx_2y_2z_2$ это выражение имеет вид

$$\begin{pmatrix} V_{Ax2} \\ V_{Ay2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell\cos\beta \\ -\ell\sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & -h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}+\dot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi}+\dot{\beta} \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем уравнения второй $V_{Px2} = 0$ и третьей $V_{Py2} = 0$ связей:

$$V_{Ax2} + \dot{\psi}\ell\sin\beta - \dot{\varphi}r = 0, \qquad V_{Ay2} + \dot{\psi}\ell\cos\beta + \left(\dot{\psi}+\dot{\beta}\right)h = 0. \tag{1.26}$$

Здесь

$$V_{Ax2} = \dot{x}\cos\left(\psi+\beta\right) + \dot{y}\sin\left(\psi+\beta\right);$$
$$V_{Ay2} = -\dot{x}\sin\left(\psi+\beta\right) + \dot{y}\cos\left(\psi+\beta\right). \qquad (1.27)$$

Матрица $\mathbf{B}$, отвечающая уравнениям связи и вектору $\mathbf{q}$, имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\psi+\beta\right) & \sin\left(\psi+\beta\right) & \ell\sin\beta & 0 & -r \\ -\sin\left(\psi+\beta\right) & \cos\left(\psi+\beta\right) & \ell\cos\beta + h & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Для записи выражения кинетической энергии $T = T\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ воспользуемся результатами задачи 1.3.

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{\psi}a\left(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi\right)\right) + \frac{1}{2}I\dot{\psi}^2; \qquad I = m\left(a^2 + \rho^2\right).$$

Найдем вектор обобщенных сил $\mathbf{Q} = \left(Q_x, Q_y, Q_\psi, Q_\beta, Q_\varphi\right)^T$. Для этого запишем выражение суммы мощностей всех активных сил на возможных скоростях:

$$M_{1y2}\dot{\varphi}^{\text{â}} + M_{2z}\left(\dot{\beta}^{\text{â}} + \dot{\psi}^{\text{â}}\right) + M'_{2z}\,\dot{\psi}^{\text{â}} =$$
$$= M_1\dot{\varphi}^{\text{â}} + M_2\dot{\beta}^{\text{â}} = Q_x\dot{x}^{\text{â}} + Q_y\dot{y}^{\text{â}} + Q_\psi\dot{\psi}^{\text{â}} + Q_\beta\dot{\beta}^{\text{â}} + Q_\varphi\dot{\varphi}^{\text{â}},$$

отсюда $Q_x = 0;\quad Q_y = 0;\quad Q_\psi = 0;\quad Q_\beta = M_2;\quad Q_\varphi = M_1.$

Выполним все процедуры, предусмотренные оператором (1.1), учитывая, что $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)^T$:

$$\begin{pmatrix} m\left(\ddot{x} - \ddot{\psi}a\sin\psi - \dot{\psi}^2 a\cos\psi\right) \\ m\left(\ddot{y} + \ddot{\psi}a\cos\psi - \dot{\psi}^2 a\sin\psi\right) \\ I\ddot{\psi} + ma\left(\ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_2 \\ M_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\psi & \cos\left(\psi+\beta\right) & -\sin\left(\psi+\beta\right) \\ \cos\psi & \sin\left(\psi+\beta\right) & \cos\left(\psi+\beta\right) \\ 0 & \ell\sin\beta & \ell\cos\psi + h \\ 0 & 0 & h \\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

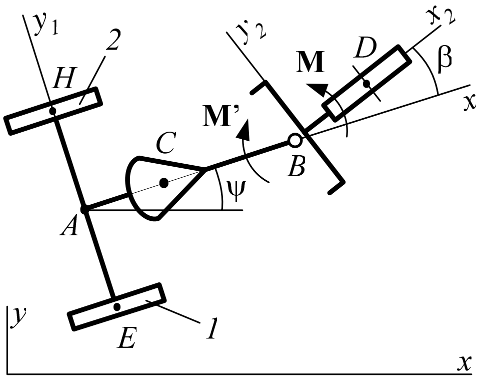
$$m\left(\ddot{x} - \ddot{\psi}a\sin\psi - \dot{\psi}^2 a\cos\psi\right) = -\lambda_1\sin\psi + \lambda_2\cos\left(\psi+\beta\right) - \lambda_3\sin\left(\psi+\beta\right);$$
$$m\left(\ddot{y} + \ddot{\psi}a\cos\psi - \dot{\psi}^2 a\sin\psi\right) = \lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\left(\psi+\beta\right) + \lambda_3\cos\left(\psi+\beta\right);$$
$$I\ddot{\psi} + ma\left(\ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi\right) = \lambda_2\ell\sin\beta + \lambda_3\left(\ell\cos\beta + h\right);$$
$$M_2 + \lambda_3 h = 0;$$
$$M_1 - \lambda_2 r = 0.$$

Исключим из полученных уравнений неопределенные множители. Для этого первое уравнение умножим на $\cos\psi$, второе – на $\sin\psi$ и сложим их. Множители λ_2, λ_3 найдем из последних уравнений. После несложных преобразований получим

$$m\left(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi - \dot{\psi}^2 a\right) = M_1\frac{\cos\beta}{r} + M_2\frac{\sin\beta}{h};$$
$$I\ddot{\psi} + ma\left(\ddot{y}\cos\psi - \ddot{x}\sin\psi\right) = M_1\sin\beta\frac{\ell}{r} - M_2\left(\cos\beta + \frac{h}{\ell}\right). \tag{1.28}$$

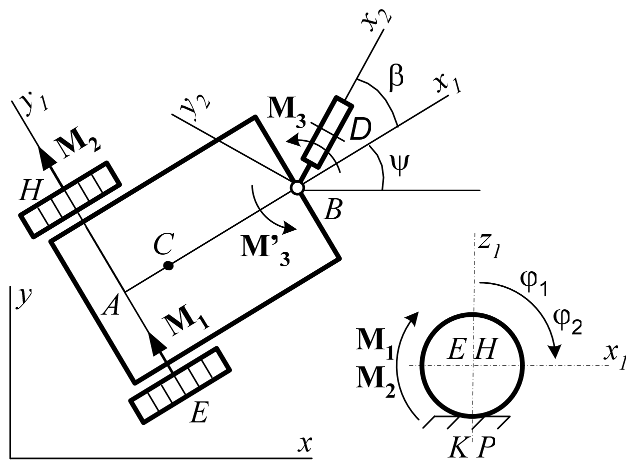
Уравнения (1.25)–(1.28) представляют замкнутую систему, определяющую движение трехколесного велосипеда.

Задача 1.11



Трехколесный велосипед катится под горку с углом наклона α. На руль передается управляющий момент $\mathbf{M}$ $(M'_z = -M_z)$. Силы сопротивления моделируются моментами $M_{1y1} = -\mu\dot{\varphi}_1$; $M_{2y1} = -\mu\dot{\varphi}_2$, приложенными к задним колесам *1* и *2* соответственно. Составить уравнения движения велосипеда, если его масса вместе с велосипедистом m; $AC = a$; C – центр масс; радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$; $AB = b$; $BD = h$; $AE = AH = \ell$; радиус колес r. Колеса катятся без проскальзывания, их массой пренебречь. Ось Ox направить по склону вниз.

Задача 1.12



Колесный трактор моделируется тележкой с двумя зубчатыми ведущими колесами радиусом r. Передние колеса моделируются рояльным колесом, к которому приложен момент $\mathbf{M}_3$ $\left(\mathbf{M}'_3 = -\mathbf{M}_3\right)$. На ведущие колеса от электродвигателя через дифференциал передаются моменты $M_1 = M/2$, $M_2 = M/2$, где M – момент на выходном валу двигателя (передаточное число дифференциала $i = 1$). Составить уравнения движения трактора, если масса корпуса m; радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$; точка C – центр масс корпуса; $CB = b$; $BD = h$; $AE = AH = \ell$. Рояльное колесо катится без скольжения, зубчатые колеса не скользят вдоль оси Ax_1 и свободно скользят вдоль оси Ay_1. Массой всех колес пренебречь.

Решение. Положение системы определяется пятимерным вектором $\mathbf{q} = \left(x, y, \psi, \beta, \varphi\right)^T$, где x, y — координаты центра масс корпуса. На систему наложены две неголономные связи $V_{Kx1} = 0$; $V_{Dy2} = 0$, уравнения которых можно получить, если составить выражения для скоростей точек K и D по графам $C \to A \to E \to K$ и $C \to B \to D$ соответственно:

$$\mathbf{V}_K = \mathbf{V}_C - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{CA} - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{AE} + \widehat{\mathbf{EK}}\boldsymbol{\Omega}_1; \tag{1.29}$$

$$\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_C - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{CB} + \widehat{\mathbf{BD}}\boldsymbol{\Omega}_2. \tag{1.30}$$

Проецируя выражение (1.29) на оси $Ax_1y_1z_1$, а выражение (1.30) — на $Bx_2y_2z_2$, получаем

$$\begin{aligned} &V_{Kx1} = V_{Cx1} + \dot{\psi}\ell - \dot{\varphi}_1 r;\\ &V_{Dy2} = V_{Cy2} + \dot{\psi} b\cos\beta + \left(\dot{\psi} + \dot{\beta} h\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Учитывая, что $V_{Cx1} = \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi;\ V_{Cy2} = -\dot{x}\sin\left(\psi + \beta\right) + \dot{y}\cos\left(\psi + \beta\right)$ и приравнивая выражения для V_{Kx1} и V_{Dy2} к нулю, получим

$$\begin{aligned} &\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + \dot{\psi}\ell - \dot{\varphi}_1 r = 0;\\ &-\dot{x}\sin\left(\psi + \beta\right) + \dot{y}\cos\left(\psi + \beta\right) + \dot{\psi} b\cos\beta + \left(\dot{\psi} + \dot{\beta}\right)h = 0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Матрица $\mathbf{B}$, отвечающая уравнениям (1.32) и вектору $\mathbf{q}$, имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & \ell & 0 & -r \\ -\sin\left(\psi + \beta\right) & \cos\left(\psi + \beta\right) & b\cos\beta + h & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражение для кинетической энергии $T = T\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2\right).$$

Найдем вектор обобщенных сил $\mathbf{Q} = \left(Q_x, Q_y, Q_\psi, Q_\beta, Q_\varphi\right)^T$. Для этого запишем выражение суммы мощностей всех активных сил на возможных скоростях, учитывая (1.13): $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 - 2\dot{\psi}\dfrac{\ell}{r}$;

$$M_1\dot{\varphi}_1^{\hat{a}} + M_2\left(\dot{\varphi}_1^{\hat{a}} - 2\dot{\psi}^{\hat{a}}\frac{\ell}{r}\right) + M_3\left(\dot{\psi}^{\hat{a}} + \dot{\beta}^{\hat{a}}\right) = Q_x\dot{x}^{\hat{a}} + Q_y\dot{y}^{\hat{a}} + Q_\psi\dot{\psi}^{\hat{a}} + Q_\beta\dot{\beta}^{\hat{a}} + Q_\varphi\dot{\varphi}_1^{\hat{a}}.$$

Принимая во внимание, что $M_1 = M_2 = M/2$, получим

$$Q_x = 0; \qquad Q_y = 0; \qquad Q_\psi = M\,\ell/r; \qquad Q_\beta = M_3; \qquad Q_\varphi = M.$$

Выполним все процедуры, предусмотренные оператором (1.1.), учитывая, что $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1, \lambda_2\right)^T$:

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\rho^2\ddot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M\,\ell/r \\ M_3 \\ M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\left(\psi + \beta\right) \\ \sin\psi & \cos\left(\psi + \beta\right) \\ \ell & b\cos\beta + h \\ 0 & h \\ -r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \cos\beta - \lambda_2 \sin(\psi + \beta);$$
$$m\ddot{y} = \lambda_1 \sin\beta + \lambda_2 \cos(\psi + \beta);$$
$$m\rho^2\ddot{\psi} = M \, \ell/r + \lambda_1 \ell + \lambda_2 (b\cos\beta + h);$$
$$0 = M_3 + \lambda_2 h;$$
$$0 = M - \lambda_1 r.$$

После исключения неопределенных множителей λ_1, λ_2 получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= M\cos\psi \frac{1}{r} + M_3 \sin(\psi + \beta)\frac{1}{h}; \\ m\ddot{y} &= M\sin\psi \frac{1}{r} + M_3 \cos(\psi + \beta)\frac{1}{h}; \\ m\rho^2\ddot{\psi} &= -M_3\left(\frac{b\cos\beta}{h} + 1\right). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Уравнения (1.32), (1.33) представляют замкнутую систему, определяющую движение тележки с зубчатыми колесами.

2. Уравнения Воронца и Чаплыгина

Уравнения Воронца получаются после исключения неопределённых множителей из системы уравнений (1.1), (1.2). Уравнения неголономных связей (1.1) представляются в виде:

$$\underset{\ell\times 1}{\dot{\mathbf{q}}_2} = \underset{\ell\times r}{\mathbf{A}}\,\underset{r\times 1}{\dot{\mathbf{q}}_1}, \tag{2.1}$$

где для вектора обобщенных координат используется представление

$$\underset{s\times 1}{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}; \quad \underset{r\times 1}{\mathbf{q}_1} = \begin{pmatrix} q_1 \\ .. \\ q_r \end{pmatrix}; \quad \underset{\ell\times 1}{\mathbf{q}_2} = \begin{pmatrix} q_{r+1} \\ .. \\ q_s \end{pmatrix}; \qquad r + \ell = s. \tag{2.2}$$

Вектор обобщенных сил тоже разбивается на две группы аналогично (2.2):

$$\underset{s\times 1}{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}; \qquad \underset{r\times 1}{\mathbf{Q}_1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ .. \\ Q_r \end{pmatrix}; \qquad \underset{\ell\times 1}{\mathbf{Q}_2} = \begin{pmatrix} Q_{r+1} \\ .. \\ Q_s \end{pmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\mathbf{q}}_1}\right)^T - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^T &= \mathbf{Q}_1 + \mathbf{A}^T\left(\mathbf{Q}_2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{q}_2}\right)^T\right) + \\ &+ \left[\frac{d\mathbf{A}^T}{dt} - \left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^T - \mathbf{A}^T\left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial\mathbf{q}_2}\right)^T\right]\mathbf{p}_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

называются уравнениями Воронца, где $\Theta = \Theta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_1) = T(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_1, \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)$ — «приведенная» кинетическая энергия системы; $\mathbf{p_2} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2}\right)^T$ — вектор обобщенного импульса, отвечающий исключаемым обобщенным скоростям.

В (2.3) вводится понятие производной от вектора по вектору: если **x**, **q** соответственно ℓ-, s- мерные вектора, то символ $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}$ означает $\ell \times s$-матрицу вида

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_\ell}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial x_\ell}{\partial q_s} \end{bmatrix}$$

В частном случае, когда кинетическая энергия и уравнения неголономных связей не зависят от вектора обобщенных координат $\mathbf{q}_2$, уравнения Воронца переходят в уравнения Чаплыгина, которые в матричной форме имеют вид

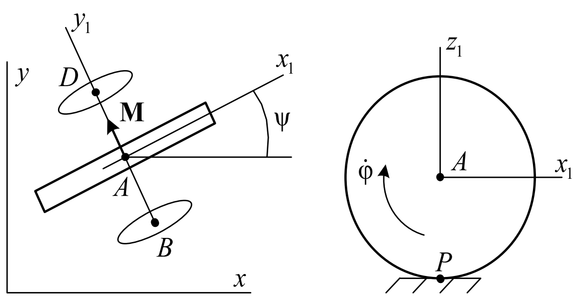
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1}\right)^T - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{q}_1}\right)^T = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_2 + \left[\frac{d\mathbf{A}^T}{dt} - \left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial \mathbf{q}_1}\right)^T\right]\mathbf{p}_2. \qquad (2.4)$$

Если действующие на систему силы потенциальны, а силовая функция U не зависит от обобщенных координат $\mathbf{q}_2$, то в уравнениях Чаплыгина (2.4) исчезает слагаемое, зависящее от $\mathbf{Q}_2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1}\right)^T - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{q}_1}\right)^T = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_1}\right)^T + \left[\frac{d\mathbf{A}^T}{dt} - \left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial \mathbf{q}_1}\right)^T\right]\mathbf{p}_2. \qquad (2.5)$$

Задача 2.1

Система, состоящая из однородного диска массой m_1, радиусом R и двух противовесов массой m_2 каждый (модель Тримарана), движется по горизонтальной плоскости под действием момента M, приложенного к диску. Составить уравнения движения системы и определить движение, отвечающее начальным условиям $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $\varphi(0) = 0$; $\psi(0) = 0$; $\dot{\varphi}(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = 0$, если диск катится без проскальзывания; $AB = AD = \ell$; радиус инерции $\rho_{Bz} = \rho_{Dz} = \rho$. Трением между противовесами и плоскостью пренебречь.



Решение. Примем за обобщенные координаты x, y центра A колеса и углы ψ, φ ($\mathbf{q} = \left(\varphi, \psi, x, y\right)^T$). Эти координаты связаны двумя неинтегрируемыми уравнениями (1.3):

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\psi = 0, \qquad \dot{y} - R\dot{\varphi}\sin\psi = 0,$$

которые получены из условий $V_{Px} = 0$; $V_{Py} = 0$ (см. задачу 1.1).

Найдем выражение кинетической энергии системы как функции обобщенных координат и скоростей:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2.6}$$

Здесь кинетическая энергия колеса

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + T_1^{от}; \qquad T_1^{от} = \frac{m_1R^2}{8}\left(2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right) \text{ (см. задачу 1.1).}$$

Кинетическая энергия противовесов

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_B{}^2 + \dot{y}_B{}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\rho^2\dot{\psi}^2; \qquad T_3 = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_D{}^2 + \dot{y}_D{}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\rho^2\dot{\psi}^2.$$

Выразим $\dot{x}_B$, $\dot{y}_B$, $\dot{x}_D$, $\dot{y}_B$, через $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, ψ.

Проведя вычисления в соответствии с графами $A \to B$, $A \to D$, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= \dot{x} + \ell\dot{\psi}\cos\psi; \quad \dot{y}_B = \dot{y} + \ell\dot{\psi}\cos\psi; \\ \dot{x}_D &= \dot{x} - \ell\dot{\psi}\cos\psi; \quad \dot{y}_D = \dot{y} - \ell\dot{\psi}\cos\psi. \end{aligned} \tag{2.7}$$

После несложных преобразований с учётом (2.7) кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_0\dot{\psi}^2 + \frac{m_1R^2}{4}\dot{\varphi}^2. \tag{2.8}$$

Здесь $m = m_1 + 2m_2$; $\quad I_0 = 2m_2\rho^2 + \dfrac{m_1R^2}{2}$.

Найдем обобщенные силы Q_φ, Q_ψ, Q_x, Q_y. Для этого вычислим сумму мощностей активных сил на возможных скоростях:

$$M_{y1}\omega_{y1}^{\text{â}} = Q_\varphi\dot{\varphi}^{\text{â}} + Q_\psi\dot{\psi}^{\text{â}} + Q_x\dot{x}^{\text{â}} + Q_y\dot{y}^{\text{â}}.$$

Здесь $M_{y1} = M$; $\omega_{y1}^{\text{â}} = \dot{\varphi}^{\text{â}}$, следовательно,

$$Q_\varphi = M; \qquad Q_\psi = 0; \qquad Q_x = 0; \qquad Q_y = 0.$$

Представим вектор $\mathbf{q}$ в виде двух векторов:

$$\mathbf{q}_1 = (\varphi, \psi)^T; \qquad \mathbf{q}_2 = (x, y)^T.$$

Векторы обобщенных сил $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ будут соответственно равны:

$$\mathbf{Q}_1 = (M, 0)^T; \qquad \mathbf{Q}_2 = 0.$$

Вычислим функцию Θ. Для этого исключим из (2.8) $\dot{x}$, $\dot{y}$. После несложных преобразований получим

$$\Theta = \frac{1}{2}(I\dot{\varphi}^2 + I_0\dot{\psi}^2); \qquad I = \frac{3}{2}m_1R^2 + 2m_2R^2.$$

Вектор обобщенного импульса

$$\mathbf{p}_2 = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)^T = \begin{pmatrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \end{pmatrix} = mR\dot{\varphi}\begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}.$$

Так как кинетическая энергия и вектор $\dot{\mathbf{q}}_1$ не зависят от $\mathbf{q}_2$, для составления уравнений движения воспользуемся уравнениями Чаплыгина (2.4).

Уравнения неголономных связей запишем в виде (2.1):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A} = R\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 \\ \sin\psi & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Выполним все процедуры, предусмотренные (2.4):

$$\mathbf{A}^T = R\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \frac{d\mathbf{A}^T}{dt} = R\dot{\psi}\begin{pmatrix} -\sin\psi & \cos\psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial\left(A\dot{\mathbf{q}}_1\right)}{\partial \mathbf{q}_1} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_2}{\partial \mathbf{q}_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \psi} \\ \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R\dot{\varphi}\sin\psi \\ 0 & R\dot{\varphi}\cos\psi \end{pmatrix};$$

$$\left(\frac{\partial\left(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1\right)}{\partial \mathbf{q}_1}\right)^T = R\dot{\varphi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix};$$

$$\left[\frac{d\mathbf{A}^T}{dt} - \left(\frac{\partial\left(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1\right)}{\partial \mathbf{q}_1}\right)^T\right]\mathbf{p}_2 = R\begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\psi & \dot{\psi}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\psi & -\dot{\varphi}\cos\psi \end{pmatrix} mR\dot{\varphi}\begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = 0, \tag{2.10}$$

следовательно,

$$I_0\ddot{\varphi} = M; \quad \ddot{\psi} = 0. \tag{2.11}$$

Уравнения (2.9), (2.11) представляет собой замкнутую систему уравнений движения тримарана.

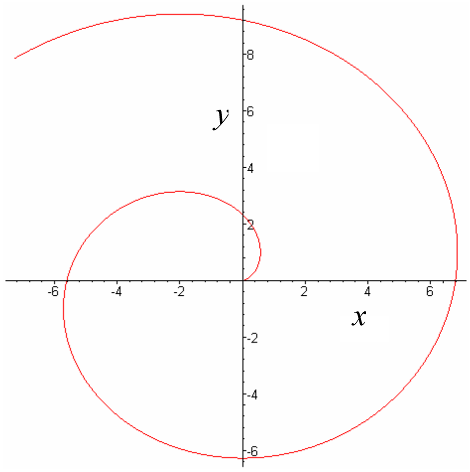
Найдём решение этой системы для заданных начальных условий. Из (2.11) получим

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{I}t; \qquad \dot{\psi} = \Omega; \qquad \psi = \Omega t.$$

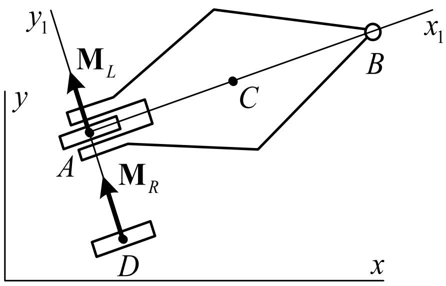
А из (2.9) —

$$\dot{x} = \frac{M}{I}t\cos(\Omega t); \qquad \dot{y} = \frac{M}{I}t\sin(\Omega t). \tag{2.12}$$

Результаты интегрирования для заданных начачальных условий уравнений (2.12) с помощью математического пакета Maple 7 представлены на рисунке траекторией движения точки *A*.

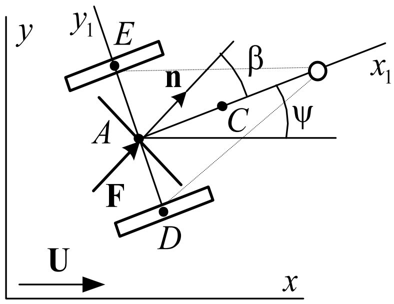


Задача 2.2



Составить уравнения движения тележки по горизонтальной плоскости под действием моментов $\mathbf{M}_R$, $\mathbf{M}_L$, приложенных к ведущим колёсам *A* и *D*. Сопротивление движению моделируется силой вязкого трения $\mathbf{F} = -\mu \mathbf{V}_B$, приложенной в точке *B*. Масса тележки – m_1; точка *C* – центр масс; *AC*=*CB*=*AD*=*a*, радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$, колёса – однородные диски массой m_2 и радиусом R.

Задача 2.3



Тележка с парусом («пляжная яхта») движется по горизонтальной плоскости. Давление ветра на парус моделируется силой **F**, приложенной в точке *A* и направленной по нормали к плоскости паруса. Парус моделируется пластиной.

Составить уравнения движения колесной яхты, если масса платформы – m_1; *AC*=*a*; точка *C* – центр масс; радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$; колёса – однородные диски массой m_2 радиусом *R*; $AD = AE = \ell$; β – угол между нормалью **n** и осью A_{x1}; колёса катятся без скольжения; рояльное колесо в точке *B* в постановке данной задачи не управляется, и считается, что в точке *B* гладкая опора.

Решение. Положение яхты определяется четырёхмерным вектором $\mathbf{q} = (\varphi, \psi, x, y)^T$, где *x*, *y* – координаты точки *A*. На систему наложены две неголономные связи, уравнения которых (1.12) получены из условий $V_{Px} = 0$; $V_{Py} = 0$ (см. задачу 1.5).

$$\dot{x} = -\dot{\psi}\ell\cos\psi + \dot{\varphi}_1 R\sin\psi\,; \qquad \dot{y} = -\dot{\psi}\ell\sin\psi + \dot{\varphi}_1 R\cos\psi\,.$$

Для определения $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ воспользуемся результатами решения задачи (1.5):

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot x^2+\dot y^2+2\dot\psi a\left(\dot y\cos\psi-\dot x\sin\psi\right)\right)+\frac{1}{2}I_1\dot\psi^2+\frac{3m_2R^2}{2}\dot\varphi_1^2-3m_2\ell R\dot\varphi_1\dot\psi\,,$$

где $I_1=m_1\left(a^2+\rho^2\right)+m_2R^2/2+6m_2\ell^2$.

Найдём обобщённые силы Q_φ, Q_ψ, Q_x, Q_y. Для этого вычислим мощность силы $\mathbf{F}$ на возможных скоростях:

$$F_x\dot x^{\hat a}+F_y\dot y^{\hat a}=Q_\varphi\dot\varphi^{\hat a}+Q_\psi\dot\psi^{\hat a}+Q_x\dot x^{\hat a}+Q_y\dot y^{\hat a}\,,$$

отсюда

$$Q_\varphi=0\,;\quad Q_\psi=0\,;\quad Q_x=F_x=F\cos(\psi+\beta)\,;\quad Q_y=F_y=F\sin(\psi+\beta)\,.$$

Представим вектор $\mathbf{q}$ в виде двух векторов: $\mathbf{q}_1=\left(\psi,\varphi_1\right)^T$, $\mathbf{q}_2=\left(x,y\right)^T$. Векторы обобщённых сил $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ будут соответственно равны:

$$\mathbf{Q}_1=0\,;\qquad \mathbf{Q}_2=\left(F_x,F_y\right)^T.$$

Вычислим функцию Θ. Для этого исключим из выражения $T=T\left(\dot{\mathbf{q}}_1,\dot{\mathbf{q}}_2,\mathbf{q}\right)$ вектор $\dot{\mathbf{q}}_2$, используя уравнения связи (1.12). После несложных преобразований получим

$$\Theta=\frac{1}{2}\left(I_1+m_1\ell^2\right)\dot\psi^2+\frac{1}{2}I_2\dot\varphi_1^2-m_0\ell R\dot\varphi_1\dot\psi\,;\qquad m_0=3m_2+m_1\,;\qquad I_2=m_0R^2\,.$$

Вектор обобщённого импульса будет равен:

$$\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}P_x\\ P_y\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial T}{\partial\dot x},\frac{\partial T}{\partial\dot y}\right)^T=m_1\begin{pmatrix}\dot x-\dot\psi a\sin\psi\\ \dot y+\dot\psi a\cos\psi\end{pmatrix}.$$

Выполним все процедуры, предусмотренные оператором (2.4). Уравнения неголономных связей представим в виде (2.1):

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}\dot\psi\\ \dot\varphi_1\end{pmatrix},\qquad \text{где } \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\ell\cos\psi & R\cos\psi\\ -\ell\sin\psi & R\sin\psi\end{pmatrix};\tag{2.13}$$

$$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}-\ell\cos\psi & -\ell\sin\psi\\ R\cos\psi & R\sin\psi\end{pmatrix};\quad \frac{d\mathbf{A}^T}{dt}=\begin{pmatrix}\dot\psi\ell\cos\psi & -\dot\psi\ell\sin\psi\\ -\dot\psi R\cos\psi & \dot\psi R\sin\psi\end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial\left(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1\right)}{\partial\overline{\mathbf{q}}_1}=\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}_2}{\partial\overline{\mathbf{q}}_1}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\dot x}{\partial\psi} & \dfrac{\partial\dot x}{\partial\varphi}\\[2mm] \dfrac{\partial\dot y}{\partial\psi} & \dfrac{\partial\dot y}{\partial\varphi_1}\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-(R\dot\varphi_1-\ell\dot\psi)\sin\psi & 0\\ (R\dot\varphi_1-\ell\dot\psi)\cos\psi & 0\end{pmatrix};$$

$$\left[\frac{d\mathbf{A}^T}{dt}-\left(\frac{\partial\left(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1\right)}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^T\right]\begin{pmatrix}P_x\\ P_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\dot\varphi\sin\psi & -R\dot\varphi\cos\psi\\ -R\dot\psi\sin\psi & R\dot\psi\cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_x\\ P_y\end{pmatrix}=m_1Ra\begin{pmatrix}-\dot\varphi_1\dot\psi\\ \dot\psi^2\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_2=\mathbf{A}^T\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\ell F\cos\beta\\ RF\cos\beta\end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\left(I_1 + m_1\ell^2\right)\ddot{\psi} - R\ell m_0\ddot{\varphi}_1 = -\ell F\cos\beta - m_1 Ra\dot{\psi}\dot{\varphi}_1;$$
$$I_2\ddot{\varphi}_1 - R\ell m_0\ddot{\psi} = RF\cos\beta + m_1 Ra\dot{\psi}^2. \qquad (2.14)$$

Система (2.14), (2.13) представляет собой замкнутую систему уравнений в форме Воронца – Чаплыгина, определяющих движение «яхты».

Задача 2.4

Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, определить движение «яхты», отвечающее начальным условиям $x(0)=0$; $y(0)=0$; $\varphi_1(0)=0$; $\psi(0)=0{,}3$ рад; $\dot{\varphi}_1(0)=3$ рад/с; $\dot{\psi}(0)=0$, на интервале времени $\tau = 10$ с, если m_1=60 кг; m_2=5 кг; R=0,3 м; l=0,5 м; β=0,3 рад; $F=\chi\left(\mathbf{U}-\mathbf{V},\mathbf{n}\right)^2$. Ветер дует в направлении оси Ox, его скорость U=4 м/с; χ=5 кг/м, $\mathbf{V}=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}$.

Построить траекторию движения точки A, $y=y(x)$ и график $V=V(t)$.

Решение. Приведём систему (2.14) к форме Коши. Для этого введём, как в задаче 1.5, переменную $V=\dot{\varphi}_1 R - \ell\dot{\psi}$ ($V=V_{Ax}$, $V_{Ay}=0$); $\dot{\varphi}_1 R = V + \ell\dot{\psi}$; $\dot{\psi}=\Omega$ и перепишем (2.14) в виде

$$I_A\ddot{\psi} + \left(3m_2 + m_1\right)\ell^2\ddot{\psi} - R\ell m_0\ddot{\varphi}_1 = -\ell F\cos\beta - m_1 Ra\dot{\psi}\dot{\varphi}_1;$$
$$m_0 R^2\ddot{\varphi}_1 - R\ell m_0\ddot{\psi} = RF\cos\beta + m_1 Ra\dot{\psi}^2.$$

Проделав замену переменных и исключив из первого уравнения $F\cos\beta$, получим

$$I_A\dot{\Omega} = -m_1 aV\Omega;$$
$$m_0\dot{V} = F\cos\beta + m_1 a\Omega^2;$$
$$I_A = m_1(a^2+\rho^2) + m_2R^2/2 + 3m_2\ell^2. \qquad (2.15)$$

Уравнения связей в новых переменных:

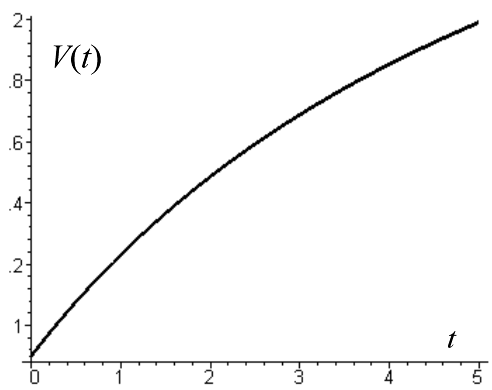
$$\dot{x} = V\cos\psi; \qquad \dot{y} = V\sin\psi. \qquad (2.16)$$

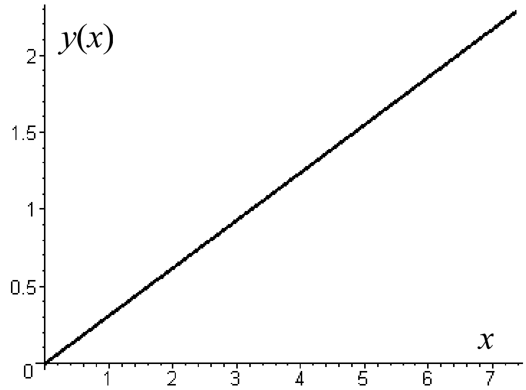
Начальное значение $V(0)=\dot{\varphi}_1(0)R - \dot{\psi}(0)\ell$.

Сила $F=\chi\left(U\cos(\psi+\beta) - V\cos(\beta)\right)^2$.

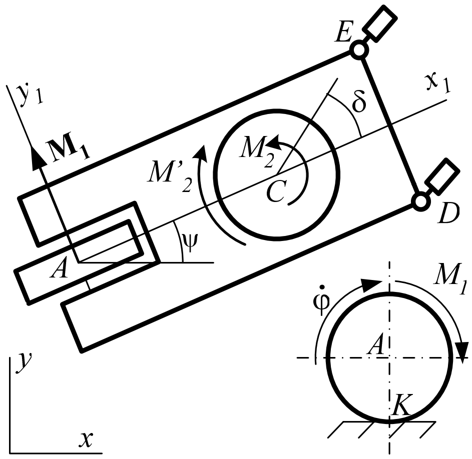
Для интегрирования системы (2.15), (2.16) и построения графиков воспользуемся математическим пакетом Maple 7.

Ниже приведены графики, полученные в результате интегрирования данных уравнений (ρ=0,7; a=0,5).





Задача 2.5



Мобильный робот движется по горизонтальной плоскости под действием момента $\mathbf{M}_1$, приложенного к ведущему колесу. Управление поворотом робота производится с помощью двигателя-маховика, ось вращения которого проходит через центр масс C платформы, момент на валу – M_2. Составить уравнения движения робота, если ведущее колесо катится без скольжения; его масса – m_1; радиус – r; масса платформы – m_2; $AC = a$; радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$; масса двигателя-маховика m_3; радиус инерции $\rho_{3Cz} = \rho_3$. Ведущее колесо считать однородным диском, а рояльные колеса D и E – гладкими опорами.

Решение. Положение робота определяется пятимерным вектором $\mathbf{q} = (\varphi, \psi, \delta, x, y)^T$, где x, y – координаты точки A. На систему наложены две неголономные связи $V_{Kx} = 0$ и $V_{Ky} = 0$, уравнения которых (1.3.) представим в виде (2.1.):

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = A\dot{\mathbf{q}}_1, \tag{2.17.}$$

где $\quad \dot{\mathbf{q}}_1 = (\dot\varphi, \dot\psi, \dot\delta)^T; \qquad \dot{\mathbf{q}}_2 = (\dot x, \dot y)^T; \qquad A = \begin{pmatrix} r\cos\psi & 0 & 0 \\ r\sin\psi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Найдем выражение кинетической энергии $T = T(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2)$:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_1 r^2}{8} (2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2);$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_2 \dot{\psi} a (\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi) + \frac{1}{2} m_2 (\rho^2 + a^2) \dot{\psi}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_3 \dot{\psi} a (\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi) + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 (\dot{\psi} + \dot{\delta})^2.$$

После несложных преобразований получим

$$T = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_1 \dot{\psi} a (\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi) + \frac{m_1 r^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 (\dot{\psi} + \dot{\delta})^2.$$

Здесь $m_0 = m_1 + m_C$; $\quad m_C = m_2 + m_3$; $\quad I = \frac{m_1 r^2}{4} + m_2 (\rho^2 + a^2) + m_3 a^2$.

Найдем вектор обобщенных сил $\mathbf{Q} = (Q_\varphi, Q_\psi, Q_\delta, Q_x, Q_y)^T$, для чего вычислим мощность активных сил на возможных скоростях:

$$M_{1y1} \dot{\varphi}^{\text{â}} + M_{2z} (\dot{\psi}^{\text{â}} + \dot{\delta}^{\text{â}}) - M_{2z} \dot{\psi}^{\text{â}} = M_1 \dot{\varphi}^{\text{â}} + M_2 \dot{\delta}^{\text{â}} =$$
$$= Q_\varphi \dot{\varphi}^{\text{â}} + Q_\psi \dot{\psi}^{\text{â}} + Q_\delta \dot{\delta}^{\text{â}} + Q_x \dot{x}^{\text{â}} + Q_y \dot{y}^{\text{â}}.$$

Отсюда

$$\mathbf{Q} = (M_1, 0, M_2, 0, 0)^T = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)^T;$$
$$\mathbf{Q}_1 = (M_1, 0, M_2)^T; \qquad \mathbf{Q}_2 = (0, 0)^T.$$

Вычислим функцию $\theta = \theta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_1)^T$:

$$\theta = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 (\dot{\psi} + \dot{\delta})^2; \qquad m = m_0 + {m_1}/{2}.$$

Вектор обобщенного импульса

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} m_0 \dot{x} - m_0 \dot{\psi} a \sin\psi \\ m_0 \dot{y} + m_0 \dot{\psi} a \cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \dot{\varphi} r \cos\psi - m_C \dot{\psi} a \sin\psi \\ m_0 \dot{\varphi} r \sin\psi + m_C \dot{\psi} a \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Выполним все процедуры, предусмотренные оператором (2.4):

$$A^T = \begin{pmatrix} r\cos\psi & r\sin\psi \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \frac{dA^T}{dt} = \begin{pmatrix} -r\dot{\psi}\sin\psi & r\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial (A\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial \mathbf{q}_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\varphi} r \sin\psi & 0 \\ 0 & \dot{\varphi} r \cos\psi & 0 \end{pmatrix};$$

$$\left[\frac{dA^T}{dt} - \left(\frac{\partial (A\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^T \right] \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\dot{\psi}\sin\psi & r\dot{\psi}\cos\psi \\ \dot{\varphi} r \sin\psi & -\dot{\varphi} r \cos\psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_C r a \dot{\psi}^2 \\ -m_C r a \dot{\varphi}\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} & m r^2 \ddot{\varphi} = M_1 + m_C r a \dot{\psi}^2; \\ & I\ddot{\psi} + m_3 \rho_3^2 (\ddot{\psi} + \ddot{\delta}) = -m_C r a \dot{\varphi} \dot{\psi}; \qquad (2.18.) \\ & m_3 \rho_3^2 (\ddot{\psi} + \ddot{\delta}) = M_2. \end{aligned}$$

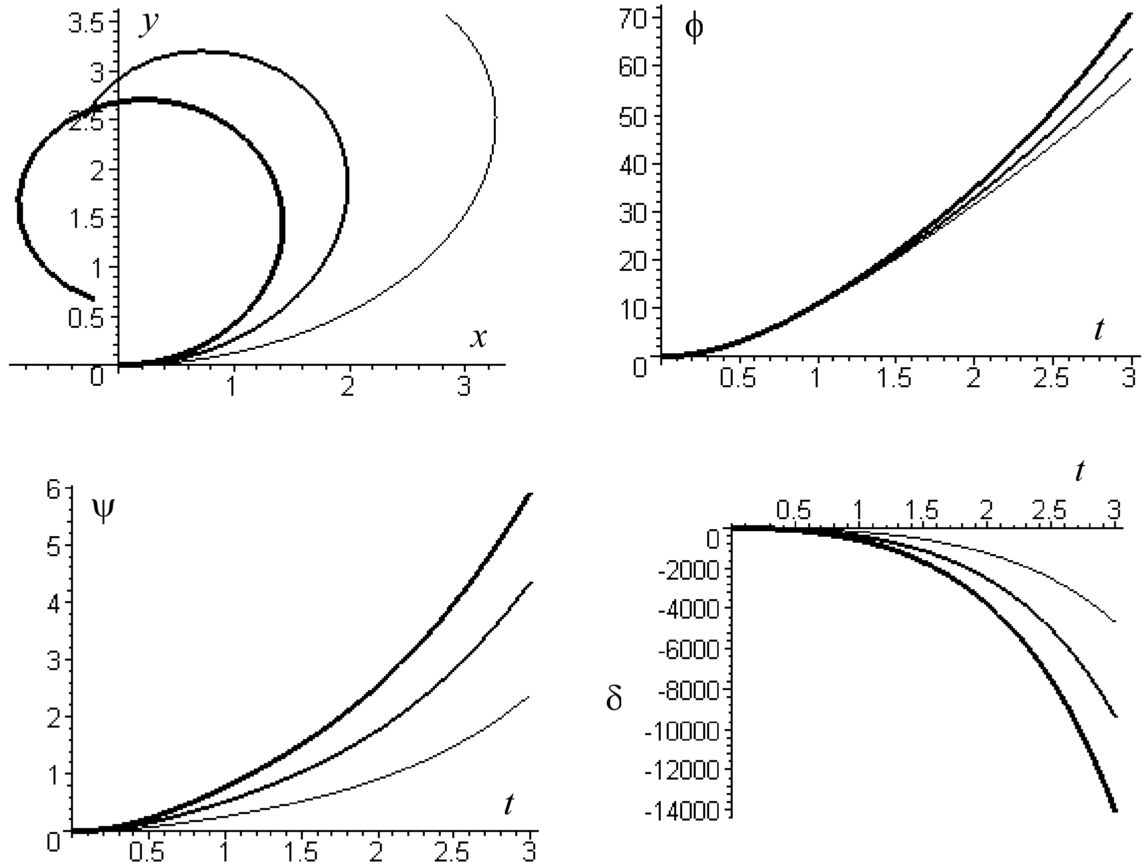
Система (2.17.), (2.18.) представляет собой замкнутую систему уравнений в форме Воронца-Чаплыгина, определяющих движение робота.

Задача 2.6

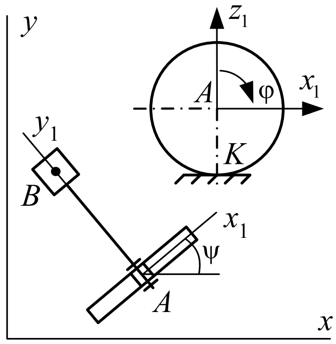
Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, определить движение робота, отвечающее начальным условиям $x(0)=0$; $y(0)=0$; $\varphi(0)=0$; $\psi(0)=0$; $\delta(0)=0$; $\dot{\varphi}(0)=0$; $\dot{\psi}(0)=0$; $\dot{\delta}(0)=0$, если $m_1=3$ кг; $m_2=25$ кг; $m_3=2$ кг; $r=0{,}1$ м; $\rho=0{,}3$ м; $\rho_3=0{,}07$ м; $a=0{,}3$ м; $M_1=c_{11}U_1-c_{12}\dot{\varphi}$; $M_2=-(c_{21}U_2-c_{22}\dot{\delta})$; $c_{11}=0{,}75\ \text{Нм}/\text{В}$; $c_{21}=0{,}7\ \text{Нм}/\text{В}$; $c_{12}=0{,}36$ Нмс; $c_{22}=0{,}01$ Нмс.

По результатам интегрирования уравнений (2.17.), (2.18.) на интервале времени $\tau=30$ с построить траектории точки A $y=y(x)$ и графики $\varphi(t),\psi(t),\delta(t)$ для трех значений напряжения U_2 на управляющем двигателе (4 Â; 8 Â; 12 Â); напряжение на ведущем двигателе $U_1=12$ В.

Решение. Для интегрирования системы (2.17.), (2.18.) и построения графиков воспользуемся математическим пакетом Maple 6. Результаты решения приведены на рис.



Задача 2.7



На вал длиной ℓ в точке A свободно насажен однородный диск массой m_1 радиусом r. В точке B к валу жестко присоединен брус. Составить уравнения движения системы по наклонной плоскости Oxy, если диск катится без скольжения, брус скользит без трения, ось x направлена по склону вниз, угол наклона плоскости равен α. Массой вала пренебречь, а брус считать материальной точкой массы m_2. Определить движение системы, отвечающее начальным условиям $x(0)=0$; $y(0)=0$; $\varphi(0)=0$; $\dot\varphi(0)=0$; $\psi(0)=0$; $\dot\psi(0)=0$ при $m_1=m_2=m$, $\ell=3r=0{,}6$ м; $\alpha=0{,}3$ рад. Построить траекторию точки A $y=y(x)$ и графики $\dot\varphi=\dot\varphi(t)$; $\dot\psi=\dot\psi(t)$; $\psi=\psi(t)$ на интервале времени $\tau=7$ с.

Решение. Положение системы определяется четырехмерным вектором $\mathbf{q}=(\varphi,\psi,x,y)^T$, где x, y – координаты точки A. На систему наложены две неголономные связи $V_{Kx}=0;\ V_{Ky}=0$, уравнения которых (1.3) $\dot x=\dot\varphi r\cos\psi;\ \dot y=\dot\varphi r\sin\psi$. Следовательно, система имеет две степени свободы. Пусть $\mathbf{q}=(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)^T$, где $\mathbf{q}_1=(\varphi,\psi)^T$, $\mathbf{q}_2=(x,y)^T$.

Выражение для кинетической энергии $T=T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}_1,\dot{\mathbf{q}}_2)$ будет

$$T=T_1+T_2,$$

где $T_1=\frac{1}{2}m_1(\dot x^2+\dot y^2)+\frac{m_1r^2}{8}(2\dot\varphi^2+\dot\psi^2)$ – кинетическая энергия колеса (получена в задаче 1.2);

$T_2=\frac{1}{2}m_2(\dot x_B^2+\dot y_B^2)$ – кинетическая энергия бруса. Здесь

$$\dot x_B=\dot x-\dot\psi\ell\cos\psi;\qquad \dot y_B=\dot y-\dot\psi\ell\sin\psi. \tag{2.19}$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{gathered}T=\frac{1}{2}m_0(\dot x^2+\dot y^2)-m_2\ell\dot\psi(\dot x\cos\psi+\dot y\sin\psi)+\frac{m_1r^2}{4}\dot\varphi^2+\frac{1}{2}I_1\dot\psi^2;\\ m_0=m_1+m_2;\qquad I_1=\frac{m_1r^2}{4}+m_2\ell^2.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Найдем вектор обобщенных сил:

$$\mathbf{Q}=\left(Q_\varphi,Q_\psi,Q_x,Q_y\right)^T=\left(\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2\right)^T,$$

для чего запишем выражение мощности активных сил на возможных скоростях:

$$N^{\hat a}=P_{1x}\dot x^{\hat a}+P_{2x}\dot x^{\hat a};\quad P_{1x}=m_1g\sin\alpha;\quad P_{2x}=m_2g\sin\alpha.$$

Так как система со стационарными связями, то $\dot x_B^{\hat a}=\dot x^{\hat a}-\dot\psi^{\hat a}\ell\cos\psi$ (2.19). Следовательно,

$$m_1 g \sin\alpha \dot{x}^{\text{â}} + m_2 g \sin\alpha(\dot{x}^{\text{â}} - \dot{\psi}^{\text{â}} \ell \cos\psi) = Q_\varphi \dot{\varphi}^{\text{â}} + Q_\psi \dot{\psi}^{\text{â}} + Q_x \dot{x}^{\text{â}} + Q_y \dot{y}^{\text{â}} .$$

Отсюда

$$Q_y = 0; \quad Q_\psi = -m_2 g \ell \sin\alpha \cos\psi; \quad Q_x = m_0 g \sin\alpha; \quad Q_y = 0;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \left(0; -m_2 g \ell \sin\alpha \cos\psi\right)^T; \qquad \mathbf{Q}_2 = \left(m_0 g \sin\alpha;\ 0\right)^T .$$

Вычислим функцию θ. Для этого, используя уравнения неголономных связей, исключим из выражения (2.20.) вектор $\dot{\mathbf{q}}_2 = \left(\dot{x}, \dot{y}\right)^T$.

После несложных преобразований получим

$$\theta = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\psi}^2 - I_3 \dot{\psi}\dot{\varphi} .$$

Здесь $I_2 = (\frac{3}{2} m_1 + m_2) r^2; \qquad I_3 = m_2 \ell r$.

Вектор обобщенного импульса, отвечающий исключенному вектору $\dot{\mathbf{q}}_2$:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}; \dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \dot{x} - m_2 \ell \dot{\psi} \cos\psi \\ m_0 \dot{y} - m_2 \ell \dot{\psi} \sin\psi \end{pmatrix} = \left(m_0 r \dot{\varphi} - m_2 \ell \dot{\psi}\right) \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} =$$

$$= f\left(\dot{\mathbf{q}}_1\right) \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}, \qquad \text{где } f\left(\dot{\mathbf{q}}_1\right) = m_0 r \dot{\varphi} - m_2 \ell \dot{\psi}.$$

Выполним все процедуры, предусмотренные (2.4.):

$$A^T = r \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{dA^T}{dt} = r\dot{\psi} \begin{pmatrix} -\sin\psi & \cos\psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial A\left(\dot{\mathbf{q}}_1\right)}{\partial \mathbf{q}_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\varphi} r \sin\psi \\ 0 & \dot{\varphi} r \cos\psi \end{pmatrix};$$

$$\left[\frac{dA^T}{dt} - \left(\frac{\partial A\left(\dot{\mathbf{q}}_1\right)}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^T \right] \mathbf{P}_2 = r \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\psi & \dot{\psi}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\psi & -\dot{\varphi}\cos\psi \end{pmatrix} f\left(\dot{\mathbf{q}}_1\right) \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g m_2 \ell \sin\alpha \cos\psi \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g m_0 \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$I_2 \ddot{\varphi} - I_3 \ddot{\psi} = m_0 g r \sin\alpha \cos\psi;$$

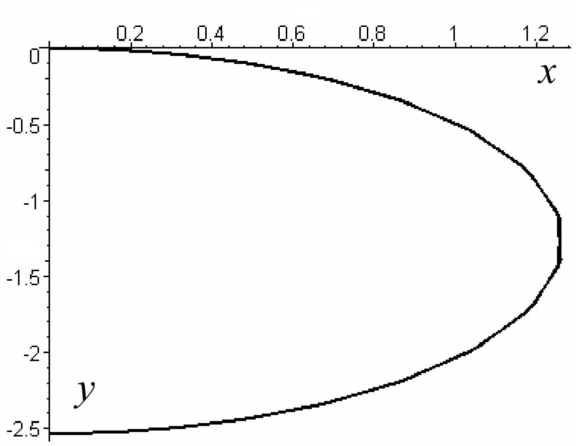
$$-I_3 \ddot{\varphi} + I_1 \ddot{\psi} = -m_2 g \ell \sin\alpha \cos\psi.$$

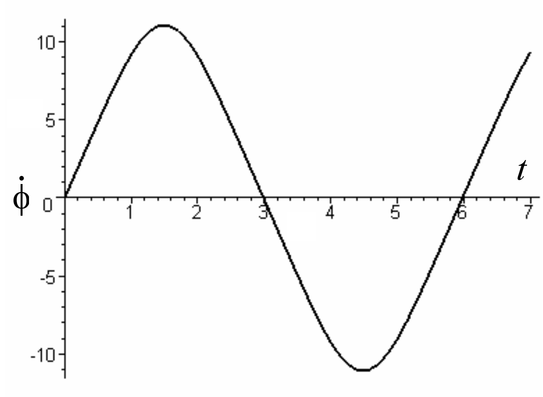
Подставим числовые значения параметров, разрешим систему относительно $\ddot{\varphi}, \ddot{\psi}$, запишем в форме Коши и дополним уравнениями связей:

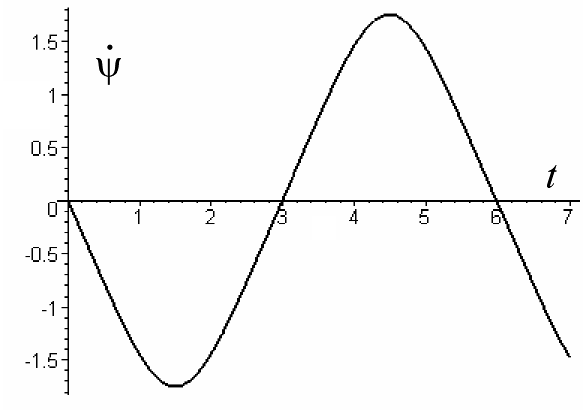
$$\omega = \dot{\varphi}; \qquad \Omega = \dot{\psi}; \qquad \dot{\omega} = 9{,}8 \cos\psi;$$

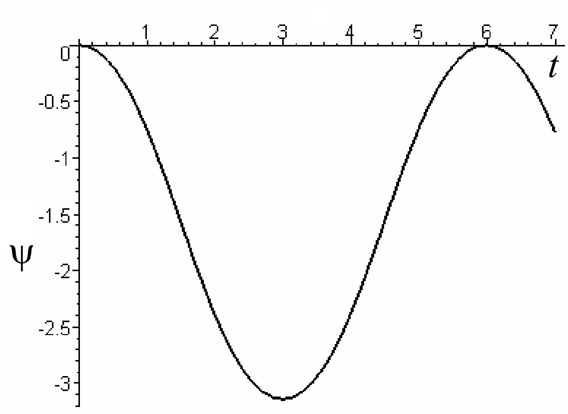
$$\dot{\Omega} = -1{,}54 \cos\psi; \qquad \dot{x} = \omega r \cos\psi; \qquad \dot{y} = \omega r \cos\psi.$$

Результаты интегрирования полученной системы с помощью математического пакета Maple 7 приведены ниже.









Библиографический список

1. **Мартыненко Ю.Г.** О матричной форме уравнений неголономной механики: Сборник научно-методических статей по теоретической механике. №23.–Изд-во МГУ, 2000.– С. 9–21.
2. **Нейман Ю.И., Фуфаев Н.А.** Динамика неголономных систем.–М.: Наука, 1967.–520 с.
3. **Маркеев А.П.** Теоретическая механика. М.: Наука, 1990.–416 с.
4. **Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.** Курс теоретической механики: Учебник. СПб.: Лань, 2002.–736 с.
5. **Зацепин М.Ф., Новожилов И.В.** Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных: Сб. научно-метод. статей по теоретической механике. Вып.18.–М.: Высш. шк., 1987.– С. 62 – 66.
6. **Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.** Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. М.: Высш. шк., 1986.–136 с.
7. **Алгоритмы** решения задач кинематики системы твердых тел / Зацепин М.Ф., Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В.–М.: Изд-во МЭИ, 1989.–78 с.
8. **Климов Д.М., Руденко В.М.** Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 215 с.

Оглавление

Учебное издание

Зацепин Михаил Федосеевич

Мартыненко Юрий Григорьевич

Тиньков Дмитрий Владимирович

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА, ВОРОНЦА, ЧАПЛЫГИНА В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ

Методическое пособие
по курсу
«Теоретические основы робототехники»

для студентов, обучающихся по направлению
«Роботы и робототехнические системы»

Редактор издательства Г.Ф.Раджабова
ЛР № 020528 от 05.06.97

Темплан издания МЭИ 2004 (I), метод. Формат $60 \times 84/16$ Физ. печ. л. 2,0
Подписано к печати
Тираж 250 Изд. № 89 Заказ

Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14
Типография ЦНИИ "Электроника", 115417, Москва,
просп. Вернадского, д. 39